Декабрьский тур олимпиады по математике. Заочный этап

Решения задач необходимо прислать на почту dom.math@ms548.ru до **17 декабря 2023 года (включительно)**.

В теме письма обязательно укажите класс, задания которого решали.

Очный тур состоится **23 декабря 2023 года**.

Внимание! Задачи не отсортированы по уровню сложности!

7 класс

1. У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов. Первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

2. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и т.д. Какое число стоит на 2023-м месте?

3. В ящике были красные, синие, жёлтые и зелёные шарики. Маша неправильно посчитала, что в ящике 20% шаров красные, 30% синие, 40% жёлтые и 50% зелёные. Дело в том, что она считала проценты не от общего количества всех шаров, а от общего количества шаров каких-то трех цветов (оставшийся, четвертый цвет назовем забытым). А какие бы результаты получила Маша, если бы считала проценты от количества шаров забытого цвета?

4. Выпуклый многоугольник разделен на два многоугольника одной из своих диагоналей. У получившихся двух многоугольников суммарно на 170 диагоналей меньше, чем у исходного многоугольника. Сколько может быть сторон у исходного многоугольника?

5. Каждое из пяти положительных чисел равно квадрату суммы оставшихся четырех. Сколько различных чисел среди данных 5-ти чисел может быть?

6. При каком наименьшем натуральном n число из n единиц будет делиться на число из ста семёрок?

7. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2023 рыцаря?

8. По кругу расположены 100 кочек, на 10 из них сидит по одной лягушке. Лягушки пронумерованы числами от 1 до 10. По команде все лягушки одновременно прыгают: лягушка номер 1 прыгает на соседнюю с ней кочку справа или слева, лягушка номер 2 прыгает через одну кочку направо или налево и так далее, лягушка номер 10 прыгает через 9 кочек направо или налево. После нескольких команд оказалось, что на каждой кочке побывала хотя бы одна лягушка. Докажите, что хотя бы одна лягушка дважды побывала на одной и той же кочке.

8 класс

1. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 9 отмеченных точек или через 10. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

2. Пронумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$... Найдите все натуральные n, для которых $p_1! + p_2! + \ldots + p_n! = a^b$ при некоторых натуральных a и b ($b>1$).

3. В стране 614 городов, некоторые из которых связаны дорогами. Каждый город соединен хотя бы с 5 другими городами. Из любого города в любой другой город можно проехать, возможно заезжая в другие города. Могло ли так оказаться, что в этой стране есть два города, кратчайший маршрут между которыми проходит ровно по 305 дорогам?

4. Найдите все пары целых чисел x и y такие, что числа $\frac{x}{y}, \frac{x^2+x}{y^2+y}, \frac{x^2+2}{y^2+2}$ также целые и какие-то два из этих трех чисел равны.

5. На соревновании по сумо было n участников, и все имели разный вес. Между ними прошло несколько схваток. После окончания соревнования оказалось, что каждый сумоист A хотя бы в одной схватке встречался с таким сумоистом, у которого за весь турнир не было схваток с сумоистами легче A. Найдите все значения n, при которых такое возможно.

6. Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC < \angle ACB$. На продолжении стороны BC за точку B отмечена такая точка D, что AB = BD. Точка E лежит на биссектрисе $\angle ABC$ так, что $\angle ACB = \angle BAE$. Отрезок BE пересекает отрезок AC в точке F. Через точку E проведена прямая, пересекающая отрезки AD и AB в точках G и H соответственно так, что AH=HG. Докажите, что AG = BF.

7. Дан четырехугольник ABCD такой, что AB = BC. На продолжении стороны AB за точку B отмечена такая точка E, что BD = BE и $AD \perp DE$. Докажите, что $\angle ACE = 90°$.

8. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $\frac{(a+b)^2(a^2+b^2)}{(a^2+ab+b^2)^2} \geq \frac{8}{9}$.

9 класс

1. При каких x функция $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_{2023})^2$ принимает наименьшее значение?

2. Футбольный мяч сшит из 32 двух лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

3. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

4. Докажите, что если центр вписанной окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей, то четырехугольник – ромб.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2 + xz + z^2 = 21, \\ y^2 + yz + z^2 = 28. \end{cases}$$

6. Числа a, b, c являются тремя из четырех корней многочлена $x^4 - ax^3 - bx + c$. Найдите все такие многочлены.

7. Точки A, B, C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

8. На 2024 деревьях, посаженных по окружности, сидели 2024 чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один – по часовой стрелке, другой – против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?